УДК 517.928

DOI

*Л. И. Ивановский*

**ДИНАМИКА ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФУЗИОННО СВЯЗАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗЬЮ**

**Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Работа посвящена динамике системы дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью. Актуальность исследований такой системы обусловлена тем, что незначительное изменение коэффициента дополнительной связи позволяет получить сложные сценарии поведения устойчивых состояний равновесия. Для рассматриваемой системы были найдены критические зависимости, при которых нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость с появлением двух пространственно неоднородных состояний в одном случае и цикла в другом. При значениях параметров, близких к критическим, были получены асимптотические формулы для режимов, ответвляющихся от нулевого решения.[[1]](#footnote-1)

*Материалы и методы.* Для задачи в комплексе применялись аналитические и численные методы решения. При численном исследовании, особое внимание уделяется значениям параметров, при которых нулевое решение системы дифференциальных уравнений теряет свою устойчивость.

*Результаты.* Были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят бифуркации нулевого состояния равновесия. При значениях параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления неоднородных состояний равновесия в одном случае и цикла в другом.

*Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов. Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие системы дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, кубическая нелинейность, нулевое состояние равновесия, потеря устойчивости.

*L. I. Ivanovsky*

**DYNAMICS OF ONE SYSTEM OF DIFFUSED CONNECTED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AUXILIARY INTERNAL CONNECTION**

**Abstract.**

*Background.* The article covers dynamics of one system of differential equations with diffused interaction and auxiliary internal cubic nonlinear connection. The relevance of research is caused by the fact that a slight change of the coefficient of auxiliary connection allows to obtain complicated behaviour of stable balance states. There were found critical values of parameters when zero balance state of the system loses its stability. When parameters were close to critical ones there were obtained asymptotic formulae for the regimes, nonuniform balance states or cycles, branched off from zero solution.

*Materials and methods.* For the problem there were applied analytical and numerical methods. The special attention was paid to the values of parameters, when zero balance state of the system loses its stability.

*Results.* There were found critical dependencies of parameters when bifurcations of zero balance state take place. When parameters were close to critical ones there were obtained conditions for the appearance of nonuniform balance states or cycles in the neighbourhood of zero solution.

*Conclusions.* The results can be used to solve problems of numerical simulation of some biophysical processes. Also the results it is of interest to extend these results to other systems of differential equations with auxiliary internal connection.

**Keywords:** system of differential equations, internal cubic nonlinear connection, zero balance state, stability loss.

**Введение**

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием

, (1)

которую дополним следующими нелинейными условиями на границах

, (2)

дающими дополнительную внутреннюю связь с кубической нелинейностью. Такие системы часто изучаются как модели связанных осцилляторов (см., например, [1–4]), в которых взаимодействие происходит не только между соседними элементами, но и с каким-нибудь внутренним элементом цепочки. Для системы (1), (2) гладкие функции при , параметры – действительные числа, а индекс определяет дополнительную внутреннюю связь между элементами и . На рис. 1 дана иллюстрация взаимодействия функций .

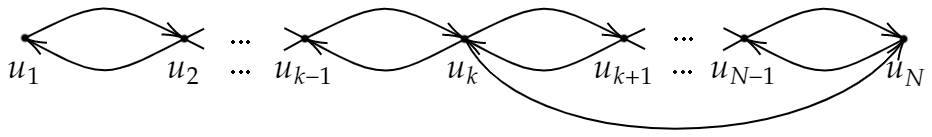


Рис 1. Взаимодействия функций в системе (1), (2)

Система (1), (2) очевидным образом имеет однородное нулевое решение . Представляет интерес вопрос устойчивости этого решения и режимов, ответвляющихся от него при критических значениях параметров. Можно выделить два способа потери устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1), (2). В первом случае через мнимую ось переходит нулевое собственное число, а во втором – пара комплексно сопряженных собственных чисел. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров и асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия.

**1. Спектральные свойства линеаризованной задачи**

Рассмотрим линеаризованную в нуле систему дифференциальных уравнений (1), (2):

, (3)

. (4)

Для определения условий устойчивости нулевого решения выполним замену

, (5)

где , – собственное значение матрицы линеаризованной системы, а коэффициент определяет собственный вектор соответствующего собственного числа матрицы системы (3) с условиями (4). При подстановке замены (5) можно получить формулы для коэффициента и параметра

arsh ,

, (6)

где .

Для изучения потери устойчивости нулевого решения определим, при каких критических значениях параметра собственные значения выходят на мнимую ось. Рассмотрим случаи нулевого и чисто мнимого значения . Подстановка в выражение (6) приводит к зависимости

, (7)

где arsh . Подстановка , где , позволяет перейти от выражения (6) при фиксированном и к уравнению относительно и

, (8)

где arsh . Выделяя вещественную и мнимую части в выражении (8) и численно решая полученную систему, находим значения и такие, чтобы было минимальным по модулю.

Исходя из ранее полученных формул, справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (1), (2) нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при значениях параметров и , связанных формулами (7) или (8).

Для системы (3), (4) изучим динамику поведения критических зависимостей и для различных значений , где – номер узла, с которым дополнительно связано последнее уравнение. В нашем случае количество уравнений считалось . Отметим, что увеличение слабо сказывается на поведении функций и .

|  |  |
| --- | --- |
| C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png | C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_plus05.png |
| а) | б) |

Рис. 2. Схематическая визуализация кривых и

На рис. 2 приведена схематическая визуализация критических зависимостей и , рассчитываемых по формулам (7) и (8) соответственно, для значений индекса и . Здесь кривая показана синим цветом, а кривая изображена красным цветом. Как показано на рис. 2, кривые и пересекаются в точке с координатами , где и . Отметим, что с увеличением индекса значение будет уменьшаться, а – увеличиваться.

|  |  |
| --- | --- |
| C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png | C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_plus05.png |
| а) | б) |
| C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png | C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_plus05.png |
| в) | г) |

Рис. 3. Схематическая визуализация кривых , и

Как показано на рис. 3, для некоторых значений индекса появляется дополнительная критическая зависимость , расчитываемая по формуле (8). Кривая показана зеленым цветом. Она берет свое начало в точке , локального минимума функции с координатами и сливается с кривой в точке с координатами , где , а . Отметим, что с увеличением индекса значение будет уменьшаться, а – увеличиваться.

Кривые и являются важнейшими элементами построения областей параметров , определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия. Так область соответствует случаю устойчивого нулевого решения, – случаю появления двух симметричных состояний равновесия, а в области наблюдается наличие цикла вблизи неустойчивого нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

Кривая определяет верхнюю границу области , отделяющую ее от области , для всех значений . Здесь вычисляется по формуле

. (9)

Величина является абсциссой точки пересечения кривых и такая, что , где – абсцисса точек вертикальной асимптоты для функции (см. рис. 2б, 3г).

Для некоторых значений индекса верхнюю границу области определяет также и кривая , для всех . Здесь вычисляется по формуле

, (10)

где – абсцисса точки пересечения кривых и такая, что (см. рис. 3в).

Для случая кривая определяет также и нижнюю границу области , отделяющую ее от области , для всех значений , где – абсцисса точки пересечения кривых и такая, что (см. рис. 3в). Отметим, что и являются корнями трансцендентного уравнения

, (11)

удовлетворяющими условию вида

. (12)

Кривая определяет нижнюю границу области , отделяющую ее от области , для всех значений . Здесь вычисляется по формуле

. (13)

Исходя из описанных результатов, можно сформулировать две леммы.

**Лемма 2.** Для всех значений , где определяется выражением (9) и , где являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12), критическая зависимость , рассчитываемая по формуле (7), позволяет выделить область параметров с устойчивым нулевым решением системы (3), (4) и области с двумя состояниями равновесия в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

**Лемма 3.** Для всех значений , где определяется выражением (10), и , где определяется выражением (13), критические зависимости и , рассчитываемые по формуле (8), позволяют выделить область параметров с устойчивым нулевым решением системы (3), (4) и области, для которых наблюдается наличие цикла в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Леммы доказываются на основе приведенного выше численного анализа линеаризованной в нуле системы (1), (2).

**2. Локальный анализ поведения системы в окрестности  
нулевого состояния равновесия**

Методами малых возмущений (см. [5, 6]) построим режим, ответвляющийся от нулевого состояния равновесия системы (1), (2). Для этого введем в рассмотрение малый параметр , который косвенно характеризует собой отклонение от нуля.

В случае нулевого собственного значения матрицы линеаризованной системы (3), (4), малый параметр обозначает переход из области в область по параметру для фиксированного значения . Здесь параметр принимает вид

, (14)

где вычисляется по формуле (7).

Воспользуемся нормальной формой, которая получается в результате разложения нулевого решения системы (1), (2) по степеням малого параметра

. (15)

Здесь функции зависят от медленного времени , а , где arsh , . Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (15) с учетом (14) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов :

(16)

(17)

Учитывая, что у системы (16) краевое условие (17) содержит кубическую нелинейность, и, тем самым, для функций система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (16), (17), можно получить укороченное уравнение на величину :

. (18)

Для уравнения (18) коэффициенты выглядят следующим образом:

, (19)

. (20)

Для коэффициентов , при различных значениях индекса были построены зависимости от параметра . Согласно численным результатам для и , где вычисляется по формуле (9), оказывался положительным, а – отрицательным. Другими словами, пара неустойчивых состояний равновесия сливалась с устойчивым нулевым решением системы (1), (2) и в результате дивергентной потери устойчивости образовывалась пара устойчивых состояний равновесия в окрестности неустойчивого нулевого решения. Графики функций и для значений индекса 7 и при показаны на рис. 4.

|  |  |
| --- | --- |
| C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png | C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png |
| а) | б) |

Рис. 4. Графики функций и при

В случае , для всех таких, что , где и являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12), малый параметр принимает вид

.

Здесь коэффициент рассчитывается по формуле (19), но имеет противоположный знак, а коэффициент считается по формуле (20). Для данного случая и оказывались положительными, что говорит о грубой потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2).

При условии, что и , уравнение (18) имеет ненулевое состояние равновесия , причем стремится к этому состоянию равновесия при . Подставляя в нормальную форму (15) полученное значение , получаем асимптотическое приближение для двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия исходной системы (1), (2) (см. также [6]):

. (21)

При условии, что и , происходит обратная бифуркация типа «вилка». В этом случае уравнение (18) имеет ненулевое состояние равновесия, где . При подстановке полученного значения в нормальную форму (15), получаем асимптотическое приближение (21) для двух пространственно неоднородных неустойчивых состояний равновесия, стягивающиеся к нулевому решению системы (1), (2) при и отбирающие у него устойчивость (см. также [8–10]).

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2), это позволяет доказать следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть , а , для , где вычисляется по формуле (9). Тогда для любого существует такое, что для система (1), (2) имеет в окрестности неустойчивого нулевого решения два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (21).

**Теорема 2.** Пусть , а для , где и являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12). Тогда для любого существует такое, что для система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (21).

В случае чисто мнимого собственного значения матрицы линеаризованной системы (3), (4), малый параметр обозначает переход из области в область по параметру для фиксированнгого значения . Здесь принимает вид

, (22)

где вычисляется по формуле (8). Также как и в случае дивергентной потери устойчивости, воспользуемся нормальной формой (15), для которой

,

где arsh , а (см. также [11]). Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (15) с учетом (22) приводит к последовательно разрешимым системам для собственных векторов :

(23)

(24)

Учитывая, что у системы (23) краевое условие (24) содержит кубическую нелинейность, и, тем самым, для функций система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (23), (24), можно получить укороченное уравнение на амплитуду колебаний нулевого решения:

. (25)

Для уравнения (25) коэффициенты рассчитываются по формулам

, (26)

. (27)

Для коэффициентов , при различных значениях индекса были построены зависимости от параметра . Согласно численным результатам для и , где вычисляется по формуле (10), оказывался положительным, а оказывался отрицательным. Другими словами, нулевое решение системы (1), (2) теряло свою устойчивость колебательным способом (см. также [12]): оно становилось неустойчивым, а вокруг него образовывался устойчивый цикл порядка .

В том случае, когда малый параметр принимает вид

,

коэффициент рассчитывается по формуле (26), но имеет противоположный знак, а коэффициент считается также, по формуле (27). Согласно численным результатам для всех , где вычисляется по формуле (13), оба коэффициента и оказывались положительными, что говорит о наличии неустойчивого цикла порядка , окружающего нулевое решение системы (1), (2). Графики функций и для и при и различных значениях малого параметра показаны на рис. 5.

|  |  |
| --- | --- |
| C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png | C:\_Repositories\KaschenkoEquation\Theory\Известия высших учебных заведений Пенза\cubic_divergent_phi0d0_051_minus10.png |
| а) | б) |

Рис. 5. Графики функций и при

Осуществляя переход к полярной системе координат для уравнение (25) сводится укороченной системе (см., например, [6, 13]) вида

(28)

*,* (29)

В системе (28), (29) первое уравнение не зависит от второго, в связи с этим его можно решать отдельно. В частности, при условии, что и , уравнение (28) имеет ненулевое состояние равновесия , причем стремится к этому состоянию равновесия при . В этом случае из второго уравнения заключаем, что , где – произвольное действительное число, а коэффициент вычисляется следующим образом:

Подставляя в нормальную форму (15) полученные значения и , получаем асимптотическое приближение для пространственно неоднородного цикла исходной системы (1), (2):

(30)

При условии, что и происходит обратная бифуркация Андронова-Хопфа (см., например, [5, 12]). В этом случае уравнение (28) имеет ненулевое состояние равновесия , где , которому соответствует неустойчивый цикл с асимптотикой (30), стягивающийся при к нулевому состоянию равновесия системы (1), (2) и забирающий у него устойчивость.

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2), это позволяет доказать следующие теоремы.

**Теорема 3.** Пусть , а для , где вычисляется с помощью (10). Тогда для любого существует такое, что для система (1), (2) имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой (30).

**Теорема 4.** Пусть , а для , где вычисляется с помощью (13). Тогда для любого существует такое, что для система (1), (2) имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный неустойчивый цикл с асимптотикой (30).

**Заключение**

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия. Для значений параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия в одном случае и цикла в другом.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов (см., например, [14, 15]). Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие задачи с дополнительной внутренней связью (см., например, [11]).

Автор благодарит Глызина С.Д. за постановку задачи и обсуждение результатов.

***Библиографический список***

1. **Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики // ТМФ. – 2020. – Т. 203, №1. – С. 10–25.
2. Difference Approximations of a Reaction–Diffusion Equation on Segments / S. D. Glyzin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2018. Vol. 52, No. 7. – P. 762–776.
3. Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos / S. D. Glyzin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2013. Vol. 47, No. 7. – P. 452–469.
4. **Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1400–1418.
5. **Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.** Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
6. **Глызин С. Д.** Локальные методы анализа динамических систем /   
   С. Д. Глызин. – Ярославль: ЯрГУ им. П.Г Демидова, 2006. – 91 с.
7. **Марсден Дж. Е., Мак-Кракен Д.** Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, Д. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
8. **Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
9. **Wiggins S.** Global bifurcations and Chaos: Analytical Methods / S. Wiggins. – New York: Springer, 1989. – 672 p.
10. **Wiggins S.** Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos / S. Wiggins. – New York: Springer, 2003. – 882 p.
11. **Кащенко С. А.** О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем – 2017. – Т. 24, №2. – С. 168–185.
12. **Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е.** Лекции по нелинейной динамике: учебное пособие для вузов / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. –   
    М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 516 с.
13. **Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.** Интегральные многообразия в нелинейной динамике / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
14. **Гурли С. А., Соу Дж. В.-Х., Ву Дж. Х.** Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика // СМФН. – 2003. – Т. 1. – С. 84–120.
15. **Britton N. F.** Reaction-diffusion equations and their applications to biology / N. F. Britton. – New York: Academic Press, 1986. – 277 p.

***References***

1. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. *Theoret. and Math. Phys.*, 2020, vol 203 (1), pp. 443–456.
2. Glyzin S. D. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2018, vol. 52 (7), pp. 762–776.
3. Glyzin S. D. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013. vol. 47 (7), pp. 452–469.
4. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51 (8), pp. 1307–1324.
5. Guckenheimer J., Holmes, P. J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, Applied Mathematical Sciences. Book 42, 1983, 478 p.
6. Glyzin S. D. *Lokalnye metody analiza dinamicheskikh system* [Local methods of analysis of dynamical systems] Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2006, 91 p. [In Russian]
7. Marsden J. E., McCracken M. *The Hopf Bifurcation and Its Application.* Springer, Applied Mathematical Sciences. Book 19, 1976, 424 p.
8. Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y.-H. *Theory and Applications of Hopf bifurcation*. Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series. Book 41, 1981, 311 p.
9. S. Wiggins. *Global bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. Springer, Applied Mathematical Sciences. Book 73, 1988, 495 p.
10. S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, Texts in Applied Mathematics. Book 2, 1989, 672 p.
11. Kashchenko S. A. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2018, vol. 52 (7), pp. 797–809.
12. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. Lekcii po nelinejnoj dinamike: uchebnoe posobie dlya vuzov [Lectures on nonlinear dynamics: a textbook for universities] – Moscow–Izhevsk: NIC “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2011, 516 p. [In Russian]
13. Mitropolskij Yu. A., Lykova O. B. *Integralnye mnogoobraziya v nelinejnoj dinamike* [Integral manifolds in nonlinear dynamics] Moscow: Nauka, 1973, 512 p. [In Russian]
14. Gourley S. A., So J. W.-H., Wu J. H. *Journal of Mathematical Sciences*. 2004, vol. 4 (4), pp. 5119–5153.
15. Britton N. F. *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*. New York, Academic Press, 1986, 277 p.

1. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-29-10055). [↑](#footnote-ref-1)